

Dans cette séance on va voir

- (voir la matrice de passage sur la feuille 39)
- des propriétés des matrices des applications linéaires et matrices de passage
- la formule de changement de base
- exemples !

Rappel

Propriétés
fondamentales
de matrices
des app. linéaires
des matrices de
passage

Pour $T: V \rightarrow V'$ app. lin, B base de V , B' base de V'
($\dim V = n, \dim V' = m$), alors

$$[Id_{F_1}] [T]_{B' \leftarrow B} [v]_B = [T(v)]_{B'}$$

$\in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \in \mathbb{R}^n \quad \in \mathbb{R}^m$

$$[Id_{F_2}] P_{B \leftarrow B} [v]_B = [v]_B$$

$\in M_n(\mathbb{R}) \quad \in \mathbb{R}^n \quad \in \mathbb{R}^n$

et c'est l'unique matrice qui satisfait à ça pour tout $v \in V$.
et c'est l'unique matrice qui satisfait à ça ??



Conséquences

① Si $T: V \rightarrow V'$, $S: V' \rightarrow V''$, B base de V , B' base de V' , B'' base de V''
alors

$$[S \circ T]_{B'' \leftarrow B} = [S]_{B'' \leftarrow B'} \cdot [T]_{B' \leftarrow B}$$

② $[id_V]_{B \leftarrow B} = I_{\dim(V)}$

③ T bijective ssi $[T]_{B' \leftarrow B}$ est matrice inversible

Dans ce cas, $[T]_{B' \leftarrow B}^{-1} = [T^{-1}]_{B \leftarrow B'}$

④ Pour $v \in V$

$$v \in \text{Ker}(T) \iff [v]_B \in \text{Ker}([T]_{B' \leftarrow B})$$

En particulier,

$$T \text{ injective} \iff [T]_{B' \leftarrow B} \text{ injective}$$

⑤ Pour $v' \in V'$,

$$v' \in \text{Im}(\tau) \iff [v']_{B'} \in \text{Im}([T]_{B' \leftarrow B})$$

En particulier,

$$\boxed{\tau \text{ surjective} \iff [T]_{B' \leftarrow B} \text{ surjective.}}$$

(Preuve) Pour ①, on note que

$$[S \circ \tau]_{B'' \leftarrow B} [v]_B = [(S \circ \tau)(v)]_{B''} = [S(\tau(v))]_{B''} = [S]_{B'' \leftarrow B'} [\tau(v)]_{B'}$$

$\xrightarrow{\text{par } [Id_{F_1}]}$
 $= [S]_{B'' \leftarrow B'} [\tau]_{B' \leftarrow B} [v]_B, \forall v \in V$

donc, par unicité, $[S \circ \tau]_{B'' \leftarrow B} = [S]_{B'' \leftarrow B'} [\tau]_{B' \leftarrow B}$.

Pour ②, $[id_V]_{B \leftarrow B} [v]_B \stackrel{[Id_{F_1}]}{=} [id_V(v)]_B = [v]_B = I_{\dim(V)} [v]_B, \forall v \in V$,

donc, par unicité $[id_V]_{B \leftarrow B} = I_{\dim(V)}$.

Pour ④,

$$v \in \text{Ker}(\tau) \iff \tau(v) = 0_{V'} \iff [\tau(v)]_{B'} = 0 \iff [\tau]_{B' \leftarrow B} [v]_B = 0$$

$\iff [v]_B \in \text{Ker}([T]_{B' \leftarrow B})$

Abs.

$$\tau \text{ inj} \iff \text{Ker}(\tau) = \{0_V\} \iff \text{Ker}([T]_{B' \leftarrow B}) = \{0\}$$

$\iff [T]_{B' \leftarrow B} \text{ inj.}$

Pour ⑤,

$$v' \in \text{Im}(\tau) \iff \exists v \in V \text{ t.q. } \tau(v) = v' \iff \exists v \in V \text{ t.q. } [\tau(v)]_{B'} = [v']_{B'}$$

$\xrightarrow{[Id_{F_1}]}$
 $\iff \exists v \in V \text{ t.q. } [\tau]_{B' \leftarrow B} [v]_B = [v']_{B'}$

$\iff \exists \bar{v} \in \mathbb{R}^{\dim(V)} \text{ t.q. } [\tau]_{B' \leftarrow B} \cdot \bar{v} = [v']_{B'}$

$\xrightarrow{[I]_B: V \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(V)}_{\text{bij}}}$
 $\iff [v]_B \in \text{Im}([T]_{B' \leftarrow B})$

Abs

$$\tau \text{ surj} \iff [T]_{B' \leftarrow B} \text{ surj, vu que } [I]_{B'}: V' \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(V')} \text{ est bij.}$$

Pour ③, on utilise qe ④ et ⑤ nous disent que

41

$$T \text{ bij} \Leftrightarrow T \text{ inj et surj} \Leftrightarrow [T]_{B' \leftarrow B} \text{ inj et surj} \Leftrightarrow [T]_{B' \leftarrow B} \text{ inversible}$$

En plus, dans ce cas, $T^{-1} \circ T = \text{id}_V$ et $T \circ T^{-1} = \text{id}_{V'}$ nous disent que

②

$$[T^{-1} \circ T]_{B \leftarrow B} = [\text{id}_V]_B \Rightarrow [T^{-1}]_{B \leftarrow B'} \cdot [T]_{B' \leftarrow B} = I_{\dim(V)}$$

$$[T \circ T^{-1}]_{B' \leftarrow B'} = [\text{id}_{V'}]_{B'} \Rightarrow [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [T^{-1}]_{B \leftarrow B'} = I_{\dim(V')}$$

Comme T bij, $\dim(V) = \dim(V')$ et $[T^{-1}]_{B \leftarrow B'} = [T]_{B' \leftarrow B}^{-1} \cdot \square$

Exemple Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $B'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$ $B_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$

On a calculé $[T]_{B'_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme $[T]_{B'_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}}$ admet un pivot par ligne (elle est échelonnée réduite déjà), elle est surjective $\Rightarrow T$ surjective. ∇
 (conséquence ⑤)

On va calculer $\text{Ker}(T)$.

D'après la conséquence ④,

$$p \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow [p]_{B_{\text{can}}} \in \text{Ker}([T]_{B'_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}})$$

i.e

$$p = at^2 + bt + c \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow [p]_{B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{dél}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 1

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} c \\ b+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$p \in \text{Ker}(\tau) \Leftrightarrow p = at^2 + bt + c \text{ avec } b+2a=0$$

$$\Leftrightarrow p = at^2 - 2at = at(t-2)$$

En conséquence

$$\text{Ker}(\tau) = \{ at^2 - 2at : a \in \mathbb{R} \}$$

Sinon, une autre façon:

① On calcule $\text{Ker}([\tau]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$:

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

var liées

on écrit
les var
liées en
fonction des
var libres

$$\downarrow = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

↑
var. libre

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

② On traduit les vecteurs de $\text{Ker}([\tau]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ en éléments de V :

pour chaque $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}([\tau]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ (resp. él. de la base) $\rightsquigarrow$ on obtient (resp. on él. de la base) $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in \text{Ker}(\tau)$ si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 \cdot 1 + (-2) \cdot t + 1 \cdot t^2 \in \text{Ker}(\tau) \Rightarrow \text{Ker}(\tau) = \text{Vect} \{ t^2 - 2t \}.$$

§83. Formule de changement de base

142

Changement de base

Soient $T: V \rightarrow V'$ app. lin, $B, \mathcal{E}$ bases de V
 Alors $B', \mathcal{E}'$ bases de V'

$$[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}' \leftarrow B'} [T]_{B' \leftarrow B} P_{B \leftarrow \mathcal{E}}$$

(Preuve) La conséquence ① nous dit

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} &= [\text{id}_{V'} \circ T \circ \text{id}_V]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = [\text{id}_{V'}]_{\mathcal{E}' \leftarrow B'} [T]_{B' \leftarrow B} [\text{id}_V]_{B \leftarrow \mathcal{E}} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathcal{E}' \leftarrow B'} [T]_{B' \leftarrow B} P_{B \leftarrow \mathcal{E}}. \quad \square \end{aligned}$$

Cas particulier
 $(V=V', B=B' \text{ et } \mathcal{E}=\mathcal{E}')$

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} &= P_{\mathcal{E} \leftarrow B} [T]_{B \leftarrow B} P_{B \leftarrow \mathcal{E}} \\ &= P_{B \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} [T]_{B \leftarrow B} P_{B \leftarrow \mathcal{E}} \end{aligned}$$

Notation

On écrit $[T]_B$ au lieu de $[T]_{B \leftarrow B}$ général.

Exemple 8.6 * (notation différente)

Soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

Soient $B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Alors $[T] = [T]_{B_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}}$
 $B'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{car } T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \nabla \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

app. lin ∇
 (exo)

Soient $\vec{c}_1$ $\vec{c}_2$ $\vec{c}_3$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

base de $\mathbb{R}^3$ (exo) base de $\mathbb{R}^2$ (exo)

On veut calculer

$$[T]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} \stackrel{?}{=} \underbrace{P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}}}_{\substack{\text{formule de} \\ \text{changement} \\ \text{de base}}} [T]_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} \cdot \underbrace{P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{C}}}_{\substack{\text{facile!} \\ \checkmark}}$$

car toujours de base (déjà calculée) $\checkmark$

$$P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comment calculer $P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$?

$$\begin{aligned} \textcircled{1} P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{C}'} &= [\vec{c}'_1 \ \vec{c}'_2] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ \textcircled{2} P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}} &= P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{C}'}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 13/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$